Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

Feuille 8 — Diagonalisation en BON, coniques et quadriques

Exercice 1. Diagonaliser dans une base orthonormée *pour le produit scalaire usuel* les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Trouver une rotation P qui diagonalise la forme quadratique suivante :

$$q : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto q(X) = x^2 - 16xy + 8xz + y^2 + 8yz + 7z^2.$$

En déduire si q est un produit scalaire.

Exercice 3. On considère la forme quadratique suivante :

$$q : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto q(X) = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz + z^2.$$

Dans une base orthonormée (*pour le produit scalaire usuel*) bien choisie, décrire géométriquement l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1\}.$$

Exercice 4. Soit C la conique définie par

$$x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0 .$$

Donner son équation réduite dans un repère orthonormé que l'on précisera, en déduire sa nature et ses éléments géométriques.