

Exercice 1. Parmi les anneaux suivants, dire lesquels sont des corps. Justifier soigneusement les réponses.

1. $\mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$,
2. $\mathbf{F}_3[X]/(X^2 + X + 1)$,
3. $\mathbf{Q}[X]/(X^4 + 1)$,
4. $\mathbf{F}_3[X]/(X^4 + 1)$,

Donner la caractéristique et le nombre d'éléments de chacun.

Exercice 2. On considère l'anneau

$$K = \mathbf{F}_3[X]/(X^3 - X - 1) .$$

1. Montrer que K est un corps et donner sa caractéristique, ainsi que son nombre d'éléments.
2. On note α la classe de X dans K .
 - (a) Quel est l'inverse de $1 + \alpha^2$ dans K^\times ?
 - (b) Montrer que $\alpha^{12} = (1 + \alpha)^4$ et exprimer cet élément dans la base $(1, \alpha, \alpha^2)$.
 - (c) En déduire que α est d'ordre 13 dans K^\times .