

**Exercice 1.** On considère l'équation

$$47a - 111b = 2, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbf{Z}^2. \quad (\star)$$

1. Donner un couple  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  vérifiant

$$47u - 111v = 1.$$

2. Résoudre l'équation  $(\star)$ .
3. En utilisant la première question, montrer que  $\overline{47}$  est inversible dans l'anneau  $\mathbf{Z}/111\mathbf{Z}$  et déterminer son inverse.

**Exercice 2.** On considère un nombre premier  $p$ .

1. Si  $k$  est un entier compris entre 1 et  $p - 1$ , montrer que  $p$  divise le coefficient binomial  $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ .
2. En déduire par récurrence que pour tout  $a$  dans  $\mathbf{N}$ , l'on a

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

**Question de cours 1.** Donner *deux* définitions du pgcd de deux entiers  $a$  et  $b \geq 1$ .