Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

Feuille 7 — Isométrie du plan et de l'espace euclidiens usuels

Exercice 1. 1. Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on note P le plan d'équation $x + y = 0$. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P.

2. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on note Q le plan d'équation $x + y + z = 0$. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Q.

Exercice 2. Parmi les matrice suivantes, dire lesquelles sont orthogonales. Pour celles qui sont orthogonales, décrire géométriquement l'endomorphisme associé dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales, puis décrire géométriquement les endomorphismes associés dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Dans le plan $\mathbf{R}^2$ muni de la structure euclidienne usuelle, écrire la rotation d'angle $\pi/2$ comme produit de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses par une autre symétrie orthogonale. Écrire les matrices de ces trois applications dans la base canonique et vérifier par le calcul que le produit de ces deux symétries orthogonales est bien cette rotation.