Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M54 algèbre et arithmétique

Devoir surveillé

Exercice 1. On considère $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$.

1. Rappeler brièvement pourquoi $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$.
2. Décrire $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])^\times$. (On ne cherchera pas à résoudre l'équation obtenue.)
3. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbf{Z}[\sqrt{2}] &\to \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto \overline{a+3b} \end{aligned}$$

   est un morphisme d'anneaux surjectif.
4. Montrer que les seuls carrés dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ sont 0, 1, 2 et 4. En déduire qu'il n'existe pas de morphisme d'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'étudier les ideaux d'un anneaux produit. On commence par l'exemple de $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

1. Soit $d \in \mathbf{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble

$$A_d = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } x \equiv y \mod d\} .$$

   Montrer que c'est un sous-anneau (unitaire) de $\mathbf{Z}^2$.
2. Montrer que A_d n'est pas un idéal de $\mathbf{Z}^2$.

Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires non nuls.

3. Soient I un idéal de A et J un idéal de B ; montrer que $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.
4. Réciproquement, soit K un idéal de $A \times B$. On pose

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbf{Z} \text{ tq } (x, 0) \in K\} \\ J &= \{y \in \mathbf{Z} \text{ tq } (0, y) \in K\} . \end{aligned}$$

   Montrer que I est un idéal de A et J un idéal de B, et que $K = I \times J$.
5. Montrer que l'idéal $\{(0, 0)\}$ n'est jamais premier dans $A \times B$.
6. Si I est un idéal premier de A, montrer que $I \times B$ est un idéal premier de B.
7. Si I est un idéal maximal de A, montrer que $I \times B$ est un idéal maximal de B.
8. Quels sont les idéaux premiers de $A \times B$. Lesquels sont maximaux ?