Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M33 compléments d'algèbre

Indications pour la feuille 5

Exercice 2. On a $a = 7 = -4 \mod 11$ et $b = 2 \mod 11$, donc $a^2 - b^2 = 16 - 4 = 1 \mod 11$.

Exercice 7. L'entier qui s'écrit $a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$ est $n = a_r 10^r + a_{r-1} + 10^{r-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Or , modulo 11, on a $10 = -1$, donc 10^n vaut -1 si n est impair et 1 si n est pair. Modulo 11, on a donc bien $n = (-1)^r a_r + (-1)^{r-1} a_{r-1} + \dots - a_1 + a_0$. En particulier, n est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres vaut 0 modulo 11. Ainsi, 6435 est divisible par 11 car $5 - 3 + 4 - 6 = 0$, mais 7812 ne l'est pas, car $2 - 1 + 8 - 7 = 2$.

Pour faire un critère de divisibilité par 99, on raisonne de façon analogue, mais en groupant les chiffres par deux : un nombre est divisible par 99 si et seulement si, en groupant ses chiffres par deux en partant de la droite, et en additionnant les nombres obtenus, le résultat est nul modulo 99.

Exercice 8. On va procéder par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $4 + 3^2 = 13 = 0 \mod 13$. Supposons maintenant que, pour un k fixé, on ait $4^{2k+1} + 3^{k+2} = 0 \mod 13$. On remarque que $4^2 = 3 \mod 13$. On a alors :

$$4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} = 3(4^{2k+1} + 3^{k+2}) = 0 \mod 13 .$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$, on a $4^{2k+1} + 3^{k+2} = 0 \mod 13$.

Exercice 9.

1. Si n est impair, il s'écrit $n = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. On a alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$. Or, un des deux nombres k et $k + 1$ est nécessairement pair, donc $k(k + 1)$ aussi, et $4k(k + 1)$ est multiple de 8.
2. Si n est pair, n^2 est multiple de 4. Donc, modulo 8, c'est 0 ou 4.
3. Comme x^2 et y^2 ne peuvent prendre que les valeurs 0, 1 et 4 modulo 8, la seule solution pour que leur somme fasse 2 et que chacun des deux soit 1, c'est-à-dire que x et y soit impairs. Réciproquement on voit que l'égalité est satisfaite dès que x et y sont impairs.

Exercice 10.

1. Comme $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, il suffit de calculer les carrés des entier de 0 à 6 modulo 13. On trouve

x	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \mod 13$	0	1	4	-4	3	-1	-3

Ainsi, les seuls carrés modulo 13 sont 0, ± 1, ± 3, ± 4.

2. D'après la question précédente, on a que 7 valeurs possibles pour n^2, qui à chaque fois donnent une valeur pour n par la formule $n = -n^2 - 7$. Il suffit d'essayer toutes ces valeurs pour constater que les seules solutions pour n sont 2, 7, 9 et 10 modulo 13.

Exercice 11. Commençons par calculer la liste des carrés modulo 11 : en procédant comme à l'exercice précédent, on trouve que c'est 0, 1, -2, 5, 3. Le seul nombre dont l'opposé (modulo 11) soit aussi dans la liste est 0. Ainsi, la seule solution de $a^2 = -b^2$ modulo 11 est $a = b = 0$.

Exercice 12.

1. On commence par éliminer 9 qui est nul modulo 9 (sans rire), puis on groupe les autres termes par deux : $1 + 8 = 0$, puis $2 + 7 = 0$, etc. On voit donc que la somme en question est nulle modulo 9.
2. On procède comme dans la cas précédent : on élimine d'abord n, puis à chaque fois les deux extrémités de la somme. Au final, si n est impair, il ne reste rien et la somme vaut 0. Si $n = 2k$ est pair, un k reste isolé au milieu, et la somme vaut k.

Exercice 17. Cet exercice étant plus théorique que l'objectif du cours, vous n'êtes pas obligés de la chercher : en conséquence je ne donne pas d'indications ici. N'hésitez pas à m'en demander en TD ou par mail si besoin.

Exercice 18. Même remarque que pour l'exercice précédent.