Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M33 compléments d'algèbre

Feuille 4 — arithmétique dans $\mathbf{Z}$

Exercice 1. Déterminer les entiers naturels n tels que $n \mid n+8$.

Exercice 2. Montrer par récurrence que si a est un entier impair, alors 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 3.
1. Déterminer les diviseurs de 25.
2. Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.

Exercice 4. Quel est le plus grand entier naturel dont le cube divise $a = 2^4 \times 3^6 \times 7$?

Exercice 5. Les nombres a et b étant des éléments non nuls de $\mathbf{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.
1. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
2. Si 6 divise ab, alors 6 divise a ou 6 divise b.
3. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
4. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
5. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
6. Si a divise b et si b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$ un entier et $N = n!$.
1. Montrer que les entiers $N+2, N+3, \ldots, N+n$ ne sont pas premiers.
2. Donner un exemple de 10 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3 et $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 8. Sans le calculer, dire par combien de zéros se termine 2009!.

Exercice 9. Déterminer tous les entiers n tels que $8 \mid 15(n+1)$.

Exercice 10.
1. Faire la liste de tous les diviseurs positifs de 256.
2. Quel est le nombre de diviseurs positifs de $2^4 \times 3^3$?

Exercice 11. Décomposer 455 et 175 en produit de nombres premiers. En déduire $\mathrm{pgcd}(455, 175)$ et $\mathrm{ppcm}(455, 175)$. Trouver toutes les solutions entières de chacune des équations suivantes.

$$455x + 175y = 1$$
$$455x + 175y = 35$$
$$455x + 175y = 70$$

Exercice 12. L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si l'on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

Exercice 13. On fait la division euclidienne d'un entier n par 137 et 143. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 131 et 5. Quel est cet entier n ?

Exercice 14. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 15. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m + n = 101$ et $\operatorname{pgcd}(m, n) = 3$.

Exercice 16. Soit k un entier positif. Montrer que $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux. Quel est le pgcd de $2k - 1$ et $9k + 4$?

Exercice 17. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que $\operatorname{pgcd}(a + b, ab) = 1$.

Exercice 18. Deux cyclistes effectuent des tours de piste. Le premier met 3 min 18 s, le second 3 min 45 s pour chaque tour. Ils partent ensemble sur la ligne de départ. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils à nouveau tous les deux ensemble sur cette ligne de départ ?

Exercice 19. Déterminer tous les entiers x, y vérifiant :

1. $56x + 35y = 7$.
2. $56x + 35y = 10$.

Exercice 20. Le but de cet exercice est de résoudre (P) $x^2 + y^2 = z^2$, où x, y, z sont des entiers naturels non nuls. Par le théorème de Pythagore, les triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières correspondent aux solutions de (P).

1. Soit (x, y, z) une solution de (P).
   - (a) Montrer que (nx, ny, nz) est une solution de (P) pour tout entier n strictement positif.
   - (b) Montrer qu'il existe (x', y', z') une solution de (P) et un entier n tels que $x = nx', y = ny', z = nz'$ et $\operatorname{pgcd}(x', y', z') = 1$.
2. Soit (x, y, z) une solution de (P) avec $\operatorname{pgcd}(x, y, z) = 1$.
   - (a) Montrer que x et y ne sont pas de mêmes parité.
   - (b) On suppose x pair et y impair. On pose : $x = 2u,\ z - y = 2v,\ z + y = 2w$, avec u, v des entiers strictement positifs. Montrer que v et w sont premiers entre eux.
   - (c) Montrer que $x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$ avec m et n entiers naturels de parité différentes.
   - (d) Montrer que si $x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$ alors (x, y, z) est une solution de (P).