Exercice 4 — lm204

Manuel Pégourié-Gonnard

le 3 octobre 2008

Introduction

Ce documents a plusieurs buts :

1. vous faire travailler les modes mathématiques vus aujourd'hui ;
2. vous faire réviser les notions vues antérieurement.

Vous êtes *encouragés* à vous attaquer d'abord aux formules mathématiques, et ensuite seulement au reste du texte et de sa mise en pages. Vous pouvez aussi passer dans un premier temps les formules signalées comme *plus dures*.

1 Un peu de tout

Si f est une fonction réelle intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$, elle admet une primitive, souvent notée F. On peut prendre par exemple :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si F_2 est une autre primitive de f, on a :

$$F_2 = F + \text{constante}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$. Montrer que u est croissante, et que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Y a-t-il un lien causal entre ces deux faits ?

Montrer que :

$$\sqrt{x^{2^n}} = x^{2^{n-1}} \quad \forall x$$

Plus dur : essayer d'aligner les exposants des deux cotés, comme ça :

$$\sqrt{x^{2^n}} = x^{2^{n-1}} \quad \forall x$$

Vous voyez la différence ?

Indication : utiliser `mathtools`. Il peut être utile de savoir que chacun des styles mathématiques existe dans une version *tassée*, soit *cramped* en anglais. Muni de cette information, trouver la documentation de `mathtools` à l'aide de `texdoc` ou `mthelp` et y chercher le mot-clé *cramped*.

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbf{N}$ et $\mathfrak{c}$ celui de $\mathbf{R}$, aussi appelé puissance du continu. On a

$$\mathrm{Card}(\mathbf{R}) = 2^{\mathrm{Card}(\mathbf{N})}$$

On dit que f est dérivable en x si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

existe et est finie. Je rappelle au passage la définition de la limite (finie) d'une fonction réelle en un point intérieur de son ensemble de définition. On dit que $\alpha \in \mathbf{R}$ est la limite de f en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \big((|x - x_0| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big) \tag{2}$$

Les difficultés ici sont d'avoir :
- ε et pas ϵ ;
- $\leqslant$ et pas $\leq$;
- un symoble « implique » de la bonne longueur ;
- des parenthèses de la bonne taille ;
- un espace suffisant après la virgule.

En utilisant (1) et (2), montrer que… (et pas « montrer que... » : attention aux points de suspension).

2 Alignements

Bon, sommons un peu, maintenant :

$$\sum_{i=1}^{n} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vous savez le prouver ? On peut le faire par récurrence, mais il y a une preuve plus marrante. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n}$; on peut écrire :

$$\begin{aligned}
2 \cdots S_n &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&+ n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\
&= (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1) \\
&= \underbrace{(n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ fois}} \\
&= n(n+1)
\end{aligned}$$

On dit que Gauss a trouvé ça a 5 ans.

Le déterminant de Vandermonde est :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Savez-vous prouver qu'il vaut $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)$ et est donc nul si et seulement si les x_i ne sont pas deux à deux distincts ?
Plus dur : savez-vous obtenir $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)$ avec l'ensemble de sommation dessous (vu en cours) et surtout pas trop d'espace de chaque côté [1] ?

3 Environnements de type théorème

Créer un environnement « définition » qui ait le style suivant et (plus dur, cf. `amsthdoc.pdf`) soit numéroté par section :

Définition 3.1. On appelle définition ce que vous êtes en train de lire.

Une autre pour voir :

Définition 3.2. On appelle exercice ce que vous êtes en train de faire.

4 Rien à voir

Définition 4.1. On appelle remplissage ce que je suis en train d'écrire.

Une petit référence à la définition récursive, n° 3.1. Puis la table des matières pour finir.

Table des matières

1 Un peu de tout **1**

2 Alignements **2**

3 Environnements de type théorème **3**

4 Rien à voir **3**

1. *Indication* : c'est encore `mathtools`. Cette fois je ne donne volontairement pas le mot-clé, il va falloir passer plus de temps à parcourir la doc : si on ne comprend pas trop l'anglais, on peut se contenter de regarder les exemples.