

# Corrigé de l'exercice 4 — Im204

Manuel PÉGOURIÉ-GONNARD

3 octobre 2008

## 1 Préambule

```
1 \documentclass[a4paper, 11pt]{article}
2 \usepackage[latin1]{inputenc}
3 \usepackage[T1]{fontenc}
```

Début classique. Seule modification : on a augmenté la taille de fonte de base, de 10 à 11 points. Conjointement, on va augmenter un peu la taille de la zone de texte.

```
4 \usepackage{geometry}
```

Le module `geometry` permet d'ajuster les marges comme on le désire, mais propose aussi un réglage par défaut un peu plus généreux sur la zone de texte que celui de la classe `article`. Ces réglages par défaut nous conviennent ici.

Viennent ensuite les modules pour les maths : `mathtools` et `amssymb` doivent être un réflexe dès qu'on tape des maths (on peut remplacer `mathtools` par `amsmath` s'il est absent), et `amsthm` sert à définir les environnements numérotés, comme `defn` (ligne ??) avec des styles prédéfinis (ligne ??).

```
5 \usepackage{mathtools, amssymb, amsthm}
```

Remarquez au passage qu'on peut charger plusieurs modules en une fois, à condition qu'ils n'aient pas besoin d'options. Restent les deux modules qu'il est prudent de charger en dernier :

```
6 \usepackage{xspace}
7 \usepackage[frenchb]{babel}
8 \usepackage{hyperref}
```

Cette fois on a chargé `hyperref` sans option, pour observer les liens encadrés à l'écran mais pas à l'impression, et comme d'habitude on charge `xspace` avant `babel` pour que les commandes définies par `frenchb` n'avalent pas les espaces.

Vient ensuite la définition de l'environnement numéroté `defn` (ce que `amsthm` appelle un « environnement théorème », d'où le nom des commandes). On commence par choisir un style parmi ceux existants (voir la documentation, `amsthdoc.pdf`, page 3 pour leur liste : `plain`, `definition` et `remark`), puis on effectue la définition.

```
10 \theoremstyle{definition}
11 \newtheorem{defn}{Définition}[section]
```

L'argument optionnel `[section]` indique que les définitions seront numérotées par section.

On fournit ensuite comme d'habitude les informations pour le titre, ici « dans le désordre » juste pour souligner le fait que l'ordre n'a pas d'importance.

```
13 \date{le 3 octobre 2008}
14 \author{Manuel \bsc{Pégourié-Gonnard}}
15 \title{Exercice 4 --- 1m204}
```

## 2 Corps du document

```
17 \begin{document}
18
19 \maketitle
```

Après le `\maketitle` usuel qui compose les informations fournies précédemment, on commence comme la dernière fois par une section non numérotée pour l'introduction.

```
21 \section*{Introduction}
```

Ensuite une petite liste numérotée pour réviser un peu. Bien sûr on utilise `enumerate` et on n'écrit surtout pas les numéros à la main.

```
23 Ce documents a plusieurs buts :
24 \begin{enumerate}
25   \item vous faire travailler les modes mathématiques vus aujourd'hui ;
26   \item vous faire réviser les notions vues antérieurement.
27 \end{enumerate}
```

Le paragraphe suivant est centré, écrit plus gros que le texte normal. Vu qu'on utilise déjà un environnement pour centrer, on peut s'en servir pour délimiter l'action de la commande de changement de taille, sans avoir besoin d'accolades supplémentaires. Remarquez encore l'emploi de `\emph` et non `\textit` pour mettre certains mots en évidence.

```
29 \begin{center} \large
30   Vous êtes \emph{encouragés} à vous attaquer d'abord aux formules
31   mathématiques, et ensuite seulement au reste du texte et de sa mise en
32   pages. Vous pouvez aussi passer dans un premier temps les formules
33   signalées comme \emph{plus dures}.
34 \end{center}
```

### 2.1 Un peu de tout

```
36 \section{Un peu de tout}
```

Il faut prendre garde dans le texte à bien passer en mode mathématique chaque fois qu'un objet mathématique intervient, fut-il une simple lettre.

```
38 Si  $f$  est une fonction réelle intégrable sur tout intervalle borné de
39  $\mathbb{R}$ , elle admet une primitive, souvent notée  $F$ . On peut prendre
40 par exemple :
```

La formule suivante est en mode mathématique hors texte : attention, il ne s'agit pas d'utiliser `$. . .$` et de centrer avec un environnement `center`. Le résultat ne serait pas le même, et de plus le source est plus lisible comme ça. Bien sûr en mode math hors texte, on *est* en mode maths : on n'encadre donc pas de `$. . .$` les morceaux de formule et on utilise directement les symboles comme `_` ou `^`.

```
42 \[
43   F(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t
44 \]
```

Attention à bien mettre le « d » en droit, et à l'espace fine devant. Pour la formule suivante, il faut absolument utiliser `\text` pour saisir le texte : toute autre solution sera considérée comme incorrecte <sup>1</sup> même si elle a l'air de donner le même résultat sur cet exemple.

```
46 Si $F_2$ est une autre primitive de $f$, on a :
47 \[
48   F_2 = F + \text{constante}
49 \]
```

Pour le prochain paragraphe, il faut faire attention de bien mettre entre accolades les indices qui font plus d'un caractère.

```
51 Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$
52 et $u_{n+1} = u_n + 1$. Montrer que $u$ est croissante, et que
53 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. Y a-t-il un lien causal entre ces deux
54 faits ?
```

La prochaine formule illustre le fait qu'il faut parfois rajouter beaucoup d'espace à la main pour bien séparer certains éléments comme les quantificateurs. Pour cela, `\quad` est tout indiqué. De façon générale, il faut utiliser les commandes d'espacement prédéfinies de façon à assurer une certaine cohérence plutôt que d'ajouter un espace arbitraire avec `\hspace` ou `\mspace`.

```
56 Montrer que :
57 \[
58   \sqrt{x^{2^n}} = x^{2^{n-1}} \quad \forall x
59 \]
60 Plus dur : essayer d'aligner les exposants des deux cotés, comme ça :
```

Une fois de plus, attention aux accolades après `^` pour les exposants longs.

Si on est attentif, on constate que les exposants du membre de droite sont beaucoup plus haut que ceux du membre de gauche. La raison est que pour éviter de trop étirer la racine carrée, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X passe à gauche en « style tassé ». Si l'on veut forcer un style tassé à droite aussi, on peut utiliser la commande `\cramped` fournie par le module `mathtools`.

```
62 \[
63   \sqrt{x^{2^n}} = \cramped{x^{2^{n-1}}} \quad \forall x
64 \]
65 Vous voyez la différence ?
```

C'était une question assez difficile, ne vous inquiétez pas si vous n'aviez pas trouvé.

---

1. Ce n'est pas par autoritarisme, c'est juste que dans d'autres cas les autres « solutions » ne marcheront pas alors que `\text` fonctionnera toujours.

Le prochain paragraphe commence sans retrait d'alinéa (le premier mot est collé à la marge de gauche) mais n'est pas pour autant aligné à gauche. Pour supprimer ainsi le retrait avant le premier mot, on utilise `\noindent`<sup>2</sup>. Il s'agit ensuite de réduire la taille du texte : pour cela, la commande `\small` est utilisée, et il est nécessaire d'entourer le paragraphe par des accolades pour limiter son action. Le texte lui-même comporte quelques changements de fonte locaux.

```
67 \noindent
68 {\small
69 \textbf{Indication} : utiliser \texttt{mathtools}. Il peut être utile de
70 savoir que chacun des styles mathématiques existe dans une version
71 \emph{tassée}, soit \emph{cramped} en anglais. Muni de cette information,
72 trouver la documentation de \texttt{mathtools} à l'aide de \texttt{texdoc}
73 ou \texttt{mthelp} et y chercher le mot-clé \emph{cramped}.
74 \par}
```

Un petit piège est présent à la fin : il faut terminer le paragraphe *avant* l'accolade fermante pour que l'interligne soit correct (un peu plus petit que l'interligne normal). C'est le rôle du `\par` juste avant l'accolade de fin. (Rappelons que le fin d'un paragraphe est marquée indifféremment par une ligne vide ou la commande `\par`.) La différence est subtile mais réelle : essayez sans le `\par` et comparez.

```
76 On note  $\aleph_0$  le cardinal de  $\mathbf{N}$  et  $\mathfrak{c}$  celui de
77  $\mathbf{R}$ , aussi appelé puissance du continu. On a
78 \[
79 \mathrm{Card}(\mathbf{R}) = 2^{\mathrm{Card}(\mathbf{N})}
80 \]
```

Ce fragment ne comporte pas de difficulté particulière, il faut juste penser au `\mathrm` pour le cardinal. Vous trouvez peut-être qu'il est pénible de constamment saisir `\mathbf{N}`, etc. Nous verrons bientôt comment éviter cela en définissant de nouvelles commandes.

```
82 On dit que  $f$  est dérivable en  $x$  si
83 \begin{equation} \label{eq-deriv}
84 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
85 \end{equation}
86 existe et est finie. Je rappelle au passage la définition de la limite
87 (finie) d'une fonction réelle en un point intérieur de son ensemble de
88 définition. On dit que  $\alpha \in \mathbf{R}$  est la limite de  $f$  en  $x_0$  si
```

La formule suivante comporte plusieurs points délicats. Donnons d'abord la solution puis commentons ensuite point par point.

```
90 \begin{equation} \label{eq-lim}
91 \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que }
92 \bigl(
93 (\lvert x - x_0 \rvert < \eta) \Longrightarrow
94 (\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon)
95 \bigr)
```

---

2. Le retrait d'alinéa étant appelé *indentation* en anglais, mot parfois importé tel quel en français.

96 `\end{equation}`

97 Les difficultés ici sont d'avoir :

98 `\begin{itemize}`

99 `\item  $\varepsilon$  et pas  $\epsilon$  ;`

Certaines lettres grecques possèdent des variantes dont le nom commence par `\var`. Pour les connaître, reportez-vous à la table 2 de la « liste de symboles mathématiques » distribuée, ou au document dont elle est extraite, `flsort-3.20.pdf` (table 3.12, 53).

100 `\item  $\leqslant$  et pas  $\leq$  ;`

Ces symboles se trouvent dans la table 14 du document cité (table 3.14 du document original). Comme  $\leq$  est une relation binaire<sup>3</sup>, on cherche d'abord dans la table 4 « relations binaires », puis, on se reporte à la table 14 qui présente les symboles supplémentaires de l'AMS. Ces symboles sont fournis soit par `amsmath` (ou `mathtools` dans lequel il est inclus) soit par `amssymb`, modules qu'on a chargés ligne ??, et dont je rappelle qu'ils sont obligatoires dès qu'on veut écrire des math un peu sérieusement.

101 `\item un symbole  $\Rightarrow$  de la bonne longueur ;`

La plupart des flèches on une variante longue obtenue en rajoutant « `long` » dans le nom. Il faut juste être attentif à la capitalisation (ici, la majuscule passe du R au L). On retrouve ces flèches tables 7 et 15 du document cité.

102 `\item des parenthèses de la bonne taille ;`

Ici, on a ajusté manuellement la taille des parenthèses. Ce n'est pas obligatoire mais ça rend le résultat plus facile à lire.

103 `\item un espace suffisant après la virgule.`

104 `\end{itemize}`

Espace qu'il fallait rajouter soi-même à l'aide d'une des commandes d'espacement vues en cours : ici une espace inter-mot normale. Dans le texte cette commande aurait exactement le même effet que de laisser un espace dans le source, mais je rappelle qu'en mode mathématiques les espaces sont ignorés. Il fallait aussi prendre garde à écrire les espace autour de « tel que » dans l'argument de `\text`, afin qu'ils soient lus en mode texte et ne soient donc pas ignorés.

Il y a globalement assez peu d'endroits où l'on doit retoucher l'espacement à la main en mode mathématique. Ici je fais exprès de vous présenter des situations délicates où il est préférable de retoucher les espaces pour rendre la formule plus lisible. Il faut apprendre à repérer ces situations ; le reste du temps l'espacement choisi automatiquement par  $\text{\LaTeX}$  convient très bien.

106 `En utilisant~\eqref{eq-deriv} et~\eqref{eq-lim}, montrer que\dots (et pas`

107 `\og montrer que... \fg : attention aux points de suspension).`

Il fallait ici être attentif à trois points : d'une par les références aux équations : il ne s'agit en aucun cas d'écrire le numéro à la main (les numéros pourraient changer plus tard, et on obtiendrait pas les liens hypertexte), et bien utiliser le mécanisme de référence de  $\text{\LaTeX}$  (les labels avaient été définis lignes ?? et ??). D'autre part, utiliser `\dots` pour obtenir les points de suspension, et enfin protéger l'espace qui suit cette commande. Remarquez qu'on a pas besoin de protéger l'espace après `\fg` car

---

3. Dans le sens où c'est une relation entre *deux* objets.

cette commande, fournie par `frenchb`, utilise automatiquement le module `xspace` qu'on a chargé avant `babel` (ligne ??).

## 2.2 Alignements

109 `\section{Alignements}`

Pas de problèmes particulier pour le premier paragraphe.

111 Bon, sommons un peu, maintenant :

112 `\[`

113 `\sum_{i=1}^n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}`

114 `\]`

115 Vous savez le prouver ? On peut le faire par récurrence, mais il y a une

116 preuve plus marrante. Posons  $S_n = \sum_{i=1}^n$  ; on peut écrire :

Remarquez que  $\text{\LaTeX}$ <sup>4</sup> va automatiquement centrer les points de suspension pour les aligner sur le signe « + ». Si, dans un contexte où ce n'est pas automatique, on veut forcer les points de suspension à être centrés, on peut utiliser `\cdots`.

Pour les calculs suivants, on utilise `align` pour l'alignement, et même `align*` pour éviter que les équations ne soient numérotées. L'environnement `align` s'utilise directement en mode texte et provoque le passage en mode mathématique hors texte : il remplace par exemple `equation*` et on n'a pas besoin de `\[...\]` ou encore moins de  $...$ . Attention à la syntaxe assez particulière d'`\underbrace`.

118 `\begin{align*}`

119 `2 \cdots S_n`

120 `&= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\\`

121 `&+ n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\\`

122 `&= (1+n) + (2 + n-1) + \dots + (n-1 + 2) + (n+1) \\\`

123 `&= \underbrace{(n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}} \\\`

124 `&= n(n+1)`

125 `\end{align*}`

126 On dit que `\bsc{Gauss}` a trouvé ça a 5 ans.

Remarquez la présentation du source : les coupures de lignes sont ignorées par  $\text{\LaTeX}$ , mais elles facilitent la lecture du source. Attention à bien écrire *fois* en mode texte, et à l'espace avant ce mot.

Maintenant, une petite matrice.

128 Le déterminant de `\bsc{Vandermonde}` est :

129 `\[`

130 `\begin{vmatrix}`

131 `1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\\`

132 `1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\\`

133 `\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\\`

134 `1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \\\`

---

4. En fait, ici c'est grâce à `amsmath` que ça marche.

```
135 \end{vmatrix}
136 \]
```

On a utilisé `vmatrix` pour obtenir une matrice entourée de barres verticales. Contrairement à `align`, c'est un environnement qui s'utilise quand on est déjà en mode mathématique : on a donc besoin ici des `\[...\]`. La logique de l'histoire est que `align` sert pour un alignement global des composants de toute une formule, alors qu'une matrice n'est qu'un élément d'une formule éventuellement plus grosse. Outre la syntaxe des alignements, qui est la même que pour `align` et sera la même dans les tableaux, on voit ici les différents points de suspensions disponibles : horizontaux centrés, verticaux, diagonaux.

```
138 Savez-vous prouver qu'il vaut $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i -
139 x_j)$ et est donc nul si et seulement si les $x_i$ ne sont pas deux à deux
140 distincts ?
```

Ce paragraphe ne pose pas de difficulté<sup>5</sup> particulière, mais le résultat n'est pas forcément très satisfaisant. Tentons de faire les choses autrement.

```
142 \noindent\textbf{Plus dur} : savez-vous obtenir
```

Comme d'habitude, `\noindent` supprime le retrait en début de paragraphe.

```
143 $\prod\limits_{\mathclap{1\leqslant i<j\leqslant n}} (x_i - x_j)$
```

L'usage de `\limits` pour forcer les indices de sommation sous le signe somme a été vu en cours. La difficulté était de trouver la commande `\mathclap` qui force `\latex` à ne pas prendre en compte la taille de l'indice, de façon à resserrer le texte autour du signe somme. On révise les notes de base de page avec l'indication :

```
144 avec l'ensemble de sommation dessous (vu en cours) et surtout pas trop
145 d'espace de chaque côté\footnote{\emph{Indication} : c'est encore
146 \texttt{mathtools}. Cette fois je ne donne volontairement pas le mot-clé,
147 il va falloir passer plus de temps à parcourir la doc : si on ne comprend
148 pas trop l'anglais, on peut se contenter de regarder les exemples.} ?
```

Cette question était assez difficile et dépasse le niveau exigible à l'examen. Il s'agissait juste de montrer certaines possibilités.

Par ailleurs, d'un point de vue typographique, la deuxième façon de faire n'est pas vraiment meilleure que la première : elle provoque un espace assez disgracieux entre les deux lignes du paragraphes.

## 2.3 Environnement numérotés

```
150 \section{Environnements de type théorème}
151
152 Créer un environnement définition qui ait le style suivant et (plus dur,
153 cf. \texttt{amsthdoc.pdf}) soit numéroté par section :
```

---

5. Au niveau de  $\text{\LaTeX}$ . Sur le plan mathématique, raisonner par récurrence en développant suivant la première colonne puis en utilisant la multilinéarité du déterminant.

Voir le préambule, **ligne ??** pour la définition de l'environnement, son style et sa numérotation. La documentation d'`amsthm` est assez courte, et plutôt lisible même si elle ne comporte pas beaucoup d'exemples. Les détails n'ont volontairement pas été tous évoqués en cours, prenez l'habitude de consulter la documentation, dont je vous donne le nom. Retenez les commandes et options utilisées ici : les notions vues en exercices seront souvent supposées connues par la suite, sauf celles signalées comme difficiles.

```
155 \begin{defn} \label{def-ref}
156   On appelle définition ce que vous êtes en train de lire.
157 \end{defn}
158
159 Une autre pour voir :
160 \begin{defn}
161   On appelle exercice ce que vous êtes en train de faire.
162 \end{defn}
```

Deux petites définitions juste pour illustrer la numérotation. La section suivante n'a pas d'autre but que d'illustrer la remise à zéro des numéros de définition.

```
164 \section{Rien à voir}
165
166 \begin{defn}
167   On appelle remplissage ce que je suis en train d'écrire.
168 \end{defn}
```

On fait enfin une petite référence, juste pour montrer que le mécanisme de références de  $\text{\LaTeX}$  fonctionne pour les environnements numérotés comme pour les autres objets. On révisé au passage une commande fournie par `frenchb`.

```
170 Une petit référence à la définition récursive, \no~\ref{def-ref}. Puis la
171 table des matières pour finir.
```

Terminons par une petite table des matières :

```
173 \tableofcontents
174
175 \end{document}
```

C'est tout pour cette fois.